

**ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ХЪРСТ ЕКСПОНЕНТАТА ПРИ
ВАРИАБИЛНОСТТА НА СЪРДЕЧНАТА ЧЕСТОТА
ЧРЕЗ ДИСПЕРСИОНЕН АНАЛИЗ И ИНДЕКС НА ДИСПЕРСИЯТА**

**DETERMINING THE HURST EXPONENT
OF HRV BY DISPERSION ANALYSIS AND DISPERSION INDEX**

Galya Georgieva-Tsaneva

Institute of Robotics - Bulgarian Academy of Sciences

Abstract

In this paper, two different methods for the estimation of the Hurst exponent are presented: a method based on Dispersion Analysis and a method based on Index of Dispersion for Counts. Both methods are applied in this paper to Heart Rate Variability data. The obtained results demonstrate the effectiveness of the presented methods depicted for biomedical signal processing.

Keywords: Electrocardiogram, Holter signal, Heart Rate Variability, Hurst Exponent, Dispersion Analysis, Index of Dispersion for Counts.

ВЪВЕДЕНИЕ

Посредством определяне на Хърст експонентата на вариабилността на сърдечната честота (ВСЧ) могат да бъдат определени фракталните свойства на времевата кардиологична серия. Хърст експонентата на ВСЧ се оценява от научните изследователи предимно чрез R/S метода. Докладът разглежда приложение на два статистически метода за определяне на експонентата на Хърст, базирани на дисперсионен анализ и посредством определяне индекса на дисперсията. Представените алгоритми са приложени върху кардиологични последователности от вариабилност на сърдечната честота (ВСЧ).

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИСПЕРСИОННИЯ АНАЛИЗ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ХЪРСТ ЕКСПОНЕНТАТА

Същност на метода. Разработеният от П.А.Фишер дисперсионен анализ (ANOVA - Analysis of Variance), анализиращ отношението между две случайни променливи – зависима и независима (наречена още фактор), е приложен за оценка на хърст експонентата при ВСЧ серии. В доклада е изпъл-

зван едномерен, еднофакторен модел на ANOVA.

Методът с дисперсионния анализ е базиран на следното свойство на стохастичните процеси: Дисперсията на обобщения стохастичен процес X_m намалява по-бавно отколкото реципрочната стойност на d_{win} [2]:

$$\begin{aligned} Var(X_{d_{win}}) &\sim const \cdot d_{win}^{-\beta_1}, \\ 0 < \beta_1 < 1, \end{aligned} \quad (1)$$

където: *const* – положителна константа;
 $d_{win} \geq 1$ – размер на блоковете, на които е разделен обобщения процес $X_{d_{win}}$.

При дисперсионния анализ на дадена RR серия, тя се разглежда като последователност от обобщени сегменти. Зависимата променлива при анализа се явява дисперсията на обобщената кардиологична серия, за независима променлива (фактор) е избрана дължината на сегмента d_{win} , който е част от RR последователността.

Анализът включва изчертаване графичната зависимост на $\log(Var(X_{d_{win}}))$ от $\log(d_{win})$ за различни стойности на d_{win} . За оценка на стойността на β_1 се използва наклона на регресионната линия, изчислена

по метода на най-малките квадрати. Вземайки предвид отношението $H = 1 - \hat{\beta}_1/2$ [4], оценката на хърст експонентата се определя от зависимостта:

$$\hat{H} = 1 - \hat{\beta}_1/2, \quad (2)$$

където:

$\hat{\beta}_1$ - наклон на регресионната линия;

\hat{H} - определената стойност на хърст експонентата.

Относителната грешка на изчислената хърст експонентата се определя по формулата [1]:

$$\Delta H = \frac{|\hat{H} - H|}{H} \cdot 100\%, \quad (3)$$

където:

\hat{H} - определената стойност на хърст експонентата;

H - действителната (изследвана) стойност на хърст експонентата.

Стъпки на алгоритъма по метода с дисперсионен анализ:

1. Инициализиране на входните параметри:

d_{win} - дължина на най-малкия сегмент;

N - дължина на кардиологичната серия;

2. Разделяне на времевата ВСЧ серия на еднакви сегменти с размер на сегмента d_{win} (брой RR интервали), при което се получава обобщената серия: $\{RR_m(1), RR_m(2), \dots, RR_m(k)\}$.

3. За всеки i - ти сегмент от обобщената RR серия се изчислява средната стойност по формулата [5]:

$$RR_{d_{win}}(i) = \frac{1}{d_{win}} \sum_{j=1}^{d_{win}} RR((i-1)d_{win} + j), \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, \frac{N}{d_{win}}$$

където:

4. Определяне на средната стойност на обобщената серия:

$$\mu = \overline{RR}_m = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \overline{RR}_m(j) \quad (5)$$

5. Изчисляване на дисперсията на обобщената серия по формулата [5]:

$$\sigma_m^2(RR_m) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (RR_m(i) - \mu)^2 \quad (6)$$

6. Стъпките от 2 до 5 се повтарят с различни стойности за размера m на избрания сегмент ($m = 8, 16, 32, 64, \dots$).

7. Определяне на регресионното уравнение, даващо връзката между $\text{Log}(\text{Var}(X_{d_{win}}))$ и $\text{Log}(d_{win})$. Изчисляване на следните регресионни коефициенти:

$\hat{\beta}_0$ - от пресечната точка на регресионната линия с ординатната ос;

$\hat{\beta}_1$ - наклон на регресионната линия.

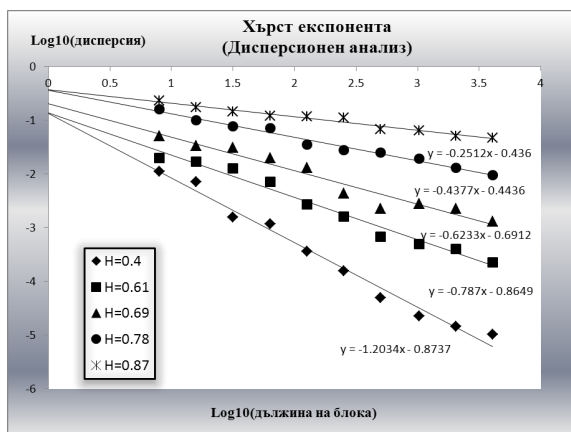
8. Определяне на хърст експонентата по формула (2).

Описаният алгоритъм е програмно реализиран на C++ в среда на Microsoft Visual Studio.

Анализ на метода. Анализът на статистическия метод с дисперсионен анализ е направен относно точното определяне на експонентата на Хърст. Приложението на ANOVA анализа върху ВСЧ данни е извършено върху симулирани ВСЧ данни с 4096 (2^{12}) интервала. Хърст експонентата е определена при симулирането на 12 ВСЧ серии за различни входни стойности на H (0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9).

На фиг. 1 са показани графичните зависимости на $\text{Log}(\text{дисперсия})$ от $\text{Log}(d_{win})$ за петте различни входни стойности на хърст експонентата, начертани са и съответните регресионни прави. От фигурата се вижда, че получените графичните зависимости са линейни.

С метода на най-малките квадрати са определени регресионните коефициенти: $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ и са показани в таблица 1.



Фиг. 1. Оценка на хърст експонентата чрез метода на дисперсионния анализ

Табл. 1. Регресионни коефициенти при метода на дисперсионния анализ

Хърст експонента	Регресионни коефициенти	
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
0.4	-0.8737	-1.2034
0.6	-0.8649	-0.787
0.7	-0.6912	-0.6233
0.8	-0.4436	-0.4377
0.9	-0.436	-0.2512

Регресионното уравнение на връзката между $\text{Log}(\text{дисперсия})$ и $\text{Log}(d_{win})$ при входна стойност $H=0.6$ (фиг. 1) се дава с израза:

$$\text{Log}(\text{дисперсия}) = -0.8649 - 0.787 \text{Log}(d_{win}).$$

Уравнението на линейната регресия при входна стойност на експонентата $H=0.8$ (фиг. 1) е:

$$\text{Log}(\text{дисперсия}) = -0.4436 - 0.4377 \text{Log}(d_{win}).$$

С формула (2) е изчислена Хърст експонентата по метода на дисперсионния анализ. В табл. 2 са дадени определената стойност \hat{H} и относителната грешка $\Delta H(\%)$ (изчислена по формула 3) при различни входни стойности на хърст експонентата. Относителната грешка при определяне на хърст експонентата нараства с повишаване стойността на входния параметър. Относителна

та грешка достига максимална стойност 2.84% при $H=0.9$.

Табл. 2 Относителни грешки при определяне на хърст експонентата с дисперсионен анализ

Хърст експонента – входна стойност	Хърст експонента и относителна грешка	
	\hat{H} определена стойност	$\Delta H(\%)$ относителна грешка
0.4	0.3983	0.43
0.6	0.6065	1.08
0.7	0.6884	1.66
0.8	0.7812	2.36
0.9	0.8744	2.84

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА ИНДЕКС НА ДИСПЕРСИЯТА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ХЪРСТ ЕКСПОНЕНТАТА

Същност на метода. Статистическият метод индекс на дисперсията [3] се използва за описване неравномерностите на изследваните времеви кардиологични серии. Индексът на дисперсията се определя от отношението на дисперсията към математическото очакване на броя информационни единици (RR интервали при ВСЧ сериите) за даден интервал от време. Методът определя промяната на времевата серия при различни времеви скали. Нека $\{RR_1, RR_2, \dots, RR_n\}$ определя RR интервалите, отчетени в последователни времеинтервали с предварително зададена дължина T . Индексът на дисперсията за t последователни времеинтервала се определя с формулата [3]:

$$IDC(t) = \frac{\sigma^2 \left[\sum_{i=1}^t RR_i \right]}{E \left[\sum_{i=1}^t RR_i \right]} \quad (7)$$

Стъпки на алгоритъма по метода индекс на дисперсията:

1. Инициализиране на входните параметри:

d_{\min} - дължина на най-малкия сегмент;

N - дължина на кардиологичната серия.

2. Разделяне на изследваната времева серия от RR интервали с дължина t на непокриващи се сегменти.

3. Определяне дисперсията на $\{\sum_{i=1}^t RR_i\}$ за всеки сегмент.

4. Изчисляване на индекса на дисперсията за всеки сегмент по формула (7).

5. Изчертаване графичната зависимост на $\text{Log}(IDC(t))$ от $\text{Log}(t)$.

6. Определяне наклона $\hat{\beta}_1$ на регресионната линия.

7. Определяне на хърст експонентата по формулата [4]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (1 + \hat{\beta}_1) \quad (8)$$

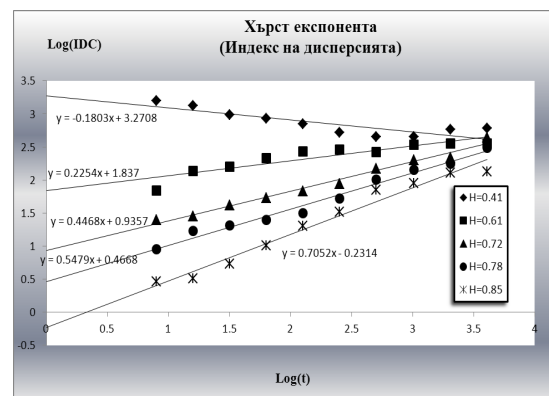
Описаният алгоритъм е програмно реализиран на C++ в среда на Microsoft Visual Studio.

Анализ на метода. Анализът на статистическия метод с индекс на дисперсията е направен относно точното определяне на Хърст експонентата при кардиологични данни.

Описаният метод, използващ индекс на дисперсията, е приложен върху симулирани ВСЧ данни с дължина 4096 (2^{12}) кардиоинтервала. Хърст експонентата е определена за всяка от симулираните 12 ВСЧ данни за 5 различни стойности на H .

Графичните зависимости на $\text{Log}(IDC)$ и $\text{Log}(t)$ и съответните регресионни прави са показани на фиг. 2. Получените графични зависимости са линейни.

С метода на най-малките квадрати са определени регресионните коефициенти: $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ и са показани в таблица 3.



Фиг. 2. Оценка на хърст експонентата чрез метода индекс на дисперсията

Табл. 3. Регресионни коефициенти при метода с индекс на дисперсията

Хърст експонента	Регресионни коефициенти	
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
0.4	3.2708	-0.1803
0.6	1.837	0.2254
0.7	0.9357	0.4468
0.8	0.4668	0.5479
0.9	-0.2314	0.7052

Регресионното уравнение на връзката между $\text{Log}(IDC)$ и $\text{Log}(t)$ при входна стойност $H=0.4$ (фиг. 2) се дава с изрази:

$$\text{Log}(IDC) = 3.2708 - 0.1803 \text{Log}(t).$$

Уравнението на линейната регресия при входна стойност на експонентата $H=0.7$ (фиг. 2) е:

$$\text{Log}(IDC) = 0.9357 + 0.4468 \text{Log}(t).$$

С формула (8) е изчислена Хърст експонентата по метода с индекс на дисперсията.

Определената средна стойност \hat{H} за всички симулирани ВСЧ последователности и относителната грешка $\Delta H(\%)$ за петте различни входни стойности на хърст експонентата са дадени в табл. 4. Относителната грешка при определяне на хърст експонентата при кардиологичните последователности е със стойности по-големи от 2 %, наблюдава се тенденция на нарастване при повишаване стойността на входния параметър и има най-висока стойност от 5.27% при $H=0.9$.

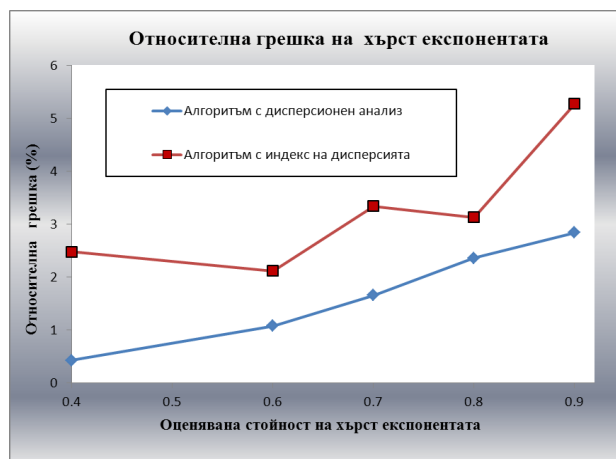
Табл. 4 Относителни грешки при определяне на хърст експонентата с индекс на дисперсията

Хърст експонента – входна стойност	Хърст експонента и относителна грешка	
	\hat{H} (средна стойност)	$\Delta H(\%)$ (относителна грешка)
0.4	0.4099	2.48
0.6	0.6127	2.12
0.7	0.7234	3.34
0.8	0.775	3.13
0.9	0.8526	5.27

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА ДВАТА МЕТОДА

Графично представяне на получените относителни грешки при определяне на хърст експонентата е дадено на фиг. 3.

При метода с дисперсионния анализ се наблюдава нарастване на относителната грешка при определяне на хърст експонентата с повишаване стойността на входния параметър.



Фиг. 3. Относителни грешки при определяне на хърст експонентата

Получените резултати с алгоритъма, използващ индекс на дисперсията, показват приемлива точност при определяне на хърст експонентата. Този статистически метод използва малко на брой изчислителни операции и не изисква големи процесорни ресурси, поради което би могъл да бъде

много ефективен при приложение при продължителни (24 часа и повече) кардиологични данни.

Сравнителният анализ на двата разглеждани метода показва по-ниски стойности на относителната грешка при определяне на хърст експонентата при метода с дисперсионен анализ (стойности по-малки от 2.9%, като максималната стойност на грешката се достига при $H=0.9$). Относителната грешка при определяне на хърст експонентата при кардиологичните последователности с метода с индекс на дисперсията е със стойности по-големи от 2 % за всички изследвани стойности на входния параметър, наблюдава се тенденция на нарастване при повишаване стойността на H и достига максимална стойност (при $H=0.9$) по-голяма от 5%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В доклада са представени резултатите от приложението на два статистически метода: метод с дисперсионен анализ и метод с индекс на дисперсията, за определяне на експонентата на Хърст при последователности от вариабилност на сърдечната честота.

Изследванията показват постигане на висока степен на точност (постигане на минимална относителна грешка на H от 0.43%) при метода с дисперсионния анализ спрямо метода индекс на дисперсията. По тази причина метода с дисперсионния анализ се оказва по-подходящ за оценка фракталните свойства при кардиологичните данни. От друга страна изчислителните операции, при получаване на хърст експонентата с метода индекс на дисперсията са много по-малко на брой, поради което този метод може да бъде използван с успех при определяне фракталността на продължителни кардиологични данни.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ciftlikli C., A. Gezer, "Comparison of Daubechies wavelets for Hurst parameter estimation", Turk J Elec Eng and Comp Sci, Vol18, No 1, pp.117-128, 2010.
- [2] Gospodinova E, M. Gospodinov, "Fractal and multifractal analysis of medical data".

- International Conference Automatics and Informatics'13, 03-07.10.2013, Sofia, Bulgaria, Proceedings: ISSN 1313-1850, CD: ISSN 1313-1869, pp. I-17–I-24.
- [3] Gusella R., “Characterizing the Variability of Arrival Processes with Indexes of Dispersion”, IEEE Journal on Selected Areas in Comm., No 9, pp.203-211, 1999.
- [4] H.-D. J. Jeong, D. McNickle and K. Pawlikowski. “Hurst Parameter Estimation Techniques: A Critical Review”. In Proceedings of ORSNZ, Conference Twenty Naught One, pp. 165-172, Christchurch, New Zealand, 2001.
- [5] Merati G., M.D.Rienzo, G.Parati, A.Veicsteinas, P.Castiglioni, “Assessment of the autonomic control of heart rate variability in healthy and spinal-cord injured subjects: Contribution of different complexity-based estimators”, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.53, No 1, pp.43-52, 2006.