

ГЛОБАЛНА СИНХРОНИЗАЦИЯ НА ТРИ ИДЕНТИЧНИ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ**GLOBAL SYNCHRONIZATION OF THREE IDENTICAL CHAOTIC SYSTEMS****Hristina Stoycheva***Technical University of Gabrovo***Abstract**

In this paper, a global chaos synchronization scheme of three novel identical systems is achieved. By choosing proper coupling parameters, the states of all the three systems can be synchronized. Some mathematical formulas and relations are presented. System attractor, time responses for the system, and the errors are graphically presented.

Keywords: chaos; global synchronization, three identical systems.

ВЪВЕДЕНИЕ

Смятана за третото революционно откритие във физиката след теория на относителността и квантовата механика, теория на хаоса е подробно проучвана в последните десетилетия. Хаосът е сложно динамично поведение на системите, притежаващо редица специфични свойства, като най-характерното от тях е силна чувствителност към малки изменения в началните условия и/или параметрите на системата [1]. С таква поведение се описват процеси в различни области като физика [2], химия [3], екология [4], еволюционна динамика [5], защитени комуникации [6] и други.

Управлението и синхронизацията на хаотичните системи са теми на интензивни изследвания през последните години. Под понятието синхронизация на хаотични системи се разбират процеси, при които две или повече хаотични системи, еквивалентни или не по структура и параметри, приспособяват динамиката си една към друга чрез свързване помежду им [7]. Съществена характеристика на преобладаващата част от известните методи за хаотична синхронизация е, че при тях се цели функциите на разсъгласуване или разликите между съответните променливи на хаотичните системи да

клонят към нула, т.е. системите да синхронизират динамиката си [8]. Основна сфера на практическо приложение на хаотичната синхронизация са защитените комуникации. Хаотични синхронизационни системи се използват в различни видове комуникационни системи или системи за криптиране на текст, изображения и видео, като най-често се изследват системи за защитени комуникации базирани на синхронизация между две хаотични системи.

В настоящата статия се постига глобално синхронизирано поведение между три идентични хаотични системи с квадратични нелинейности. Управляващите функции са синтезирани на основата на втория метод на Ляпунов, приложен върху системата от разсъгласуването между трите хаотични системи. Предложената синхронизационна схема може да се разглежда като една многостепенна хаотична система, която от своя страна може да се използва като основа за реализирането на система за защитени комуникации.

ИЗЛОЖЕНИЕ

При задачите за синхронизация на хаотични системи най-често се синтезира синхронизационна схема между еднотипни, непрекъснати системи с еднопосочна връзка

между тях. Следният обобщен запис служи за представяне на синхронизационната схема:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\mathbf{x}) + u_i \\ \dot{y} = g(\mathbf{y}) + v_i \\ \dot{z} = h(\mathbf{z}) + w_i \end{cases} \quad (1)$$

където $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}^n$ са вектори на състоянието, $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}), h(\mathbf{z}) \in \mathcal{R}^n$ са непрекъснати нелинейни функции, а u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3$) са управляващите сигнали към системата.

За да се осъществи глобална синхронизация между системите (1), се търсят такива управления u_i, v_i, w_i ($i = 1 \div 3$), че да се изпълни условието:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}(t) = 0 \quad (2)$$

където функцията на разсъгласуване между системите $\dot{\mathbf{e}}(t)$ има следния вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} = (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) &= (\dot{e}_{1i}, \dot{e}_{2i}, \dot{e}_{3i}) \\ &= (\dot{x}_i - \dot{y}_i, \dot{y}_i - \dot{z}_i, \dot{z}_i - \dot{x}_i) \end{aligned} \quad (3)$$

Синтезът на управление се реализира на основата на втория метод за устойчивост на Ляпунов, където се търси такава функция $V(\mathbf{e})$, която да отговаря на условията:

$$V(\mathbf{e}) > 0, \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (4)$$

$$V(\mathbf{e}) = 0, \mathbf{e} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} < 0, \forall \mathbf{e} \neq 0. \quad (6)$$

С цел да се изпълнят трите условия, най-често избраната функция на Ляпунов е квадратична функция от отделните съставлящи на вектора \mathbf{e} , например:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}(e_{1i}^2 + e_{2i}^2 + e_{3i}^2). \quad (7)$$

Изпълнението на третото условие ще се търси чрез подходящ синтез на управляващите функции u_i, v_i, w_i ($i = 1 \div 3$). Те трябва да бъдат така синтезирани, че за първата производна на функцията $V(\mathbf{e})$ да се получи отрицателно определен израз, на пример от типа:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = -k_{1i}e_{1i}^2 - k_{2i}e_{2i}^2 - k_{3i}e_{3i}^2, \quad (8)$$

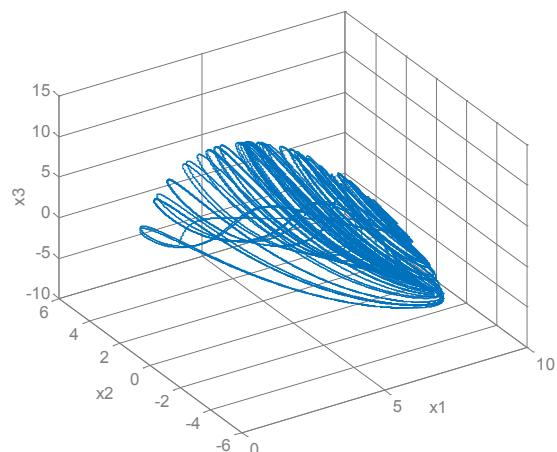
където при положителни константи k се изпълнява условието (6).

Обект на изследване в настоящата статия е прост абстрактен математичен модел на автономна система със сложна хаотична динамика, която съдържа две квадратични нелинейности [9]. Хаотичната система от трети ред, открита през 2016г. от V. Sundarapandian се представя чрез следните уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= ax_1 - bx_2 - x_3 + cx_1x_2 - p(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (9)$$

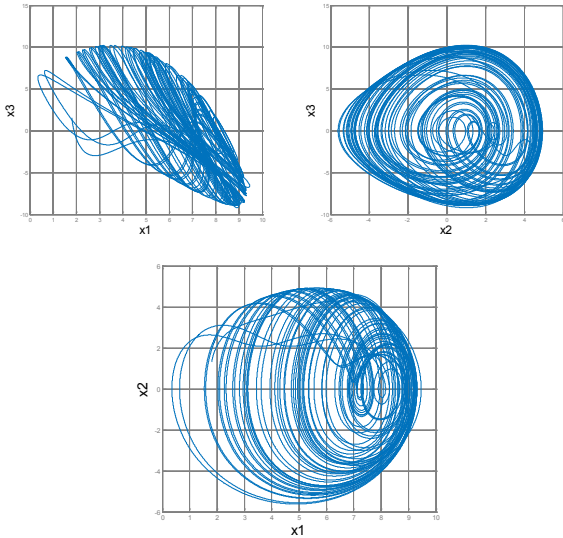
където $x_i(t)$, ($i = 1 \div 3$) са променливите на системата, а a, b, c и p са нейните параметри.

За стойности на параметрите $a = 7.5$, $b = 4$, $c = 0.03$ и $p = 0.9$ системата има хаотичен характер. Моделът (9) е симулиран в среда на MATLAB/Simulink с произволно избрани начални условия: $x_1(0) = 1.8$, $x_2(0) = 1.3$ и $x_3(0) = 1.6$, като полученият хаотичен атрактор е показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Хаотичен атрактор в пространството на състоянието

На фиг. 2 са показани проекциите на хаотичния атрактор в трите фазови равнини: (x_1, x_2) , (x_2, x_3) и (x_1, x_3) .



Фиг. 2. Проекции на хаотичния атрактор във фазовите равнини

Нека се синтезира синхронизационна схема от типа (1), с три идентични системи от вида (9):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= ax_1 - bx_2 - x_3 + cx_1x_2 - p(x_1^2 + x_2^2) + u_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + v_1 \\ \dot{y}_2 &= y_3 + v_2 \\ \dot{y}_3 &= ay_1 - by_2 - y_3 + cy_1y_2 - p(y_1^2 + y_2^2) + v_3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + w_1 \\ \dot{z}_2 &= z_3 + w_2 \\ \dot{z}_3 &= az_1 - bz_2 - z_3 + cz_1z_2 - p(z_1^2 + z_2^2) + w_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Като се вземе в предвид избраната функция на разсъгласуване между системите (3), отделните системи на грешките могат да се запишат като:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \dot{x}_1 - \dot{y}_1 = x_2 - y_2 + u_1 - v_1 \\ \dot{e}_{12} &= \dot{x}_2 - \dot{y}_2 = x_3 - y_3 + u_2 - v_2 \\ \dot{e}_{13} &= \dot{x}_3 - \dot{y}_3 = a(x_1 - y_1) - b(x_2 - y_2) - x_3 \\ &\quad + y_3 + c(x_1x_2 - y_1y_2) \\ &\quad - p[(x_1^2 + x_2^2) - (y_1^2 + y_2^2)] + u_3 \\ &\quad - v_3 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{21} &= \dot{y}_1 - \dot{z}_1 = y_2 - z_2 + v_1 - w_1 \\ \dot{e}_{22} &= \dot{y}_2 - \dot{z}_2 = y_3 - z_3 + v_2 - w_2 \\ \dot{e}_{23} &= \dot{y}_3 - \dot{z}_3 = a(y_1 - z_1) - b(y_2 - z_2) - y_3 \\ &\quad + z_3 + c(y_1y_2 - z_1z_2) \\ &\quad - p[(y_1^2 + y_2^2) - (z_1^2 + z_2^2)] + v_3 \\ &\quad - w_3 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{31} &= \dot{z}_1 - \dot{x}_1 = z_2 - x_2 + w_1 - u_1 \\ \dot{e}_{32} &= \dot{z}_2 - \dot{x}_2 = z_3 - x_3 + w_2 - u_2 \\ \dot{e}_{33} &= \dot{z}_3 - \dot{x}_3 = a(z_1 - x_1) - b(z_2 - x_2) - z_3 \\ &\quad + x_3 + c(z_1z_2 - x_1x_2) \\ &\quad - p[(z_1^2 + z_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)] + w_3 \\ &\quad - u_3 \end{aligned} \quad (15)$$

От системите на разсъгласуване могат да се изведат следните зависимости:

$$\begin{aligned} u_1 - v_1 &= -x_2 + y_2 - k_{11}e_{11} \\ u_2 - v_2 &= -x_3 + y_3 - k_{12}e_{12} \\ u_3 - v_3 &= -a(x_1 - y_1) + b(x_2 - y_2) + x_3 - y_3 \\ &\quad - c(x_1x_2 - y_1y_2) \\ &\quad + p[(x_1^2 + x_2^2) - (y_1^2 + y_2^2)] \\ &\quad - k_{13}e_{13} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v_1 - w_1 &= -y_2 + z_2 - k_{21}e_{21} \\ v_2 - w_2 &= -y_3 + z_3 - k_{22}e_{22} \\ v_3 - w_3 &= -a(y_1 - z_1) + b(y_2 - z_2) + y_3 - z_3 \\ &\quad - c(y_1y_2 - z_1z_2) \\ &\quad + p[(y_1^2 + y_2^2) - (z_1^2 + z_2^2)] \\ &\quad - k_{23}e_{23} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w_1 - u_1 &= -z_2 + x_2 - k_{31}e_{31} \\ w_2 - u_2 &= -z_3 + x_3 - k_{32}e_{32} \\ w_3 - u_3 &= -a(z_1 - x_1) + b(z_2 - x_2) + z_3 - x_3 \\ &\quad - c(z_1z_2 - x_1x_2) \\ &\quad + p[(z_1^2 + z_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)] \\ &\quad - k_{33}e_{33} \end{aligned} \quad (18)$$

Управляващите функции u_i, v_i, w_i ($i = 1 \div 3$) се избират както следва:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -x_3 + y_3 - k_{12}e_{12} \\ u_3 &= a(z_1 - x_1) - b(z_2 - x_2) - z_3 + x_3 \\ &\quad + c(z_1z_2 - x_1x_2) \\ &\quad - p[(z_1^2 + z_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)] \\ &\quad + k_{33}e_{33} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= x_2 - y_2 + k_{11}e_{11} \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= -a(y_1 - z_1) + b(y_2 - z_2) + y_3 - z_3 \\ &\quad - c(y_1y_2 - z_1z_2) \\ &\quad + p[(y_1^2 + y_2^2) - (z_1^2 + z_2^2)] \\ &\quad - k_{23}e_{23} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -z_2 + x_2 - k_{31}e_{31} \\ w_2 &= y_3 - z_3 + k_{22}e_{22} \\ w_3 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Отчитайки функциите (13 ÷ 15), избраната квадратична функция на Ляпунов (7) добива вида:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2) \quad (22)$$

След диференциране спрямо времето, се получава:

$$\dot{V} = e_{11}\dot{e}_{11} + e_{12}\dot{e}_{12} + e_{13}\dot{e}_{13} + e_{21}\dot{e}_{21} + e_{22}\dot{e}_{22} + e_{23}\dot{e}_{23} + e_{31}\dot{e}_{31} + e_{32}\dot{e}_{32} + e_{33}\dot{e}_{33} \quad (23)$$

Трите идентични хаотични системи дадени с уравненията (10), (11) и (12) са глобално синхронизирани за всички начални стойности посредством управляващите функции (19), (20) и (21), където константите k_{ij} , ($i, j = 1 \div 3$) са положителни.

Доказателство за това твърдение е, че избраната функция $V(\mathbf{e})$ на Ляпунов в уравнение (22) е квадратична и положителна функция в множеството \mathcal{R}^3 . След кратки математически преобразувания се получава следното уравнение за \dot{V} :

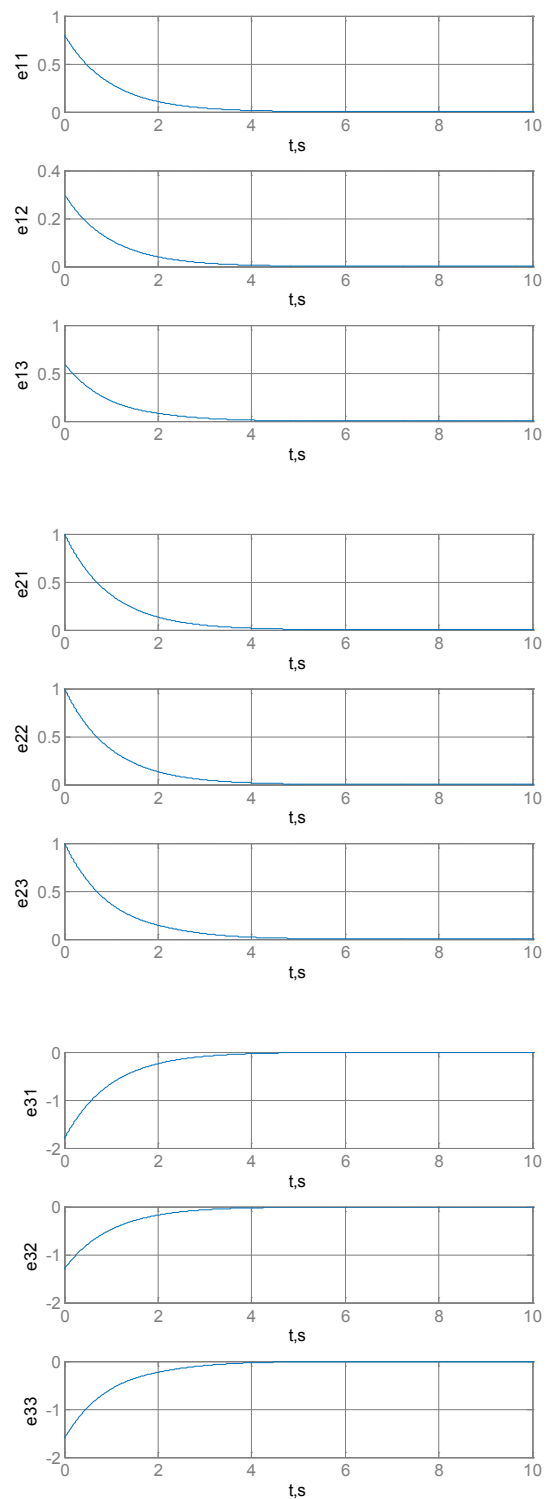
$$\dot{V} = -k_{11}e_{11}^2 - k_{12}e_{12}^2 - k_{13}e_{13}^2 - k_{21}e_{21}^2 - k_{22}e_{22}^2 - k_{23}e_{23}^2 - k_{31}e_{31}^2 - k_{32}e_{32}^2 - k_{33}e_{33}^2 \quad (23)$$

От (23) е ясно, че първата производна на $V(\mathbf{e})$ е отрицателно определена, с което функцията $V(\mathbf{e})$ отговаря на условията на втория метод за устойчивост на Ляпунов.

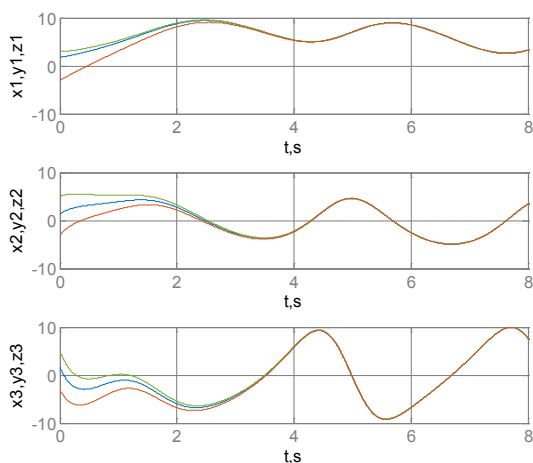
Синхронизационната схема между трите системи (10÷12) с управляващи функции (19÷21) с коефициенти $k_{ij} = 1$, $i, j = 1 \div 3$ е реализирана и симулирана в среда на MATLAB/Simulink.

Началните условия на системите са съответно $x(0) = [1.8 \ 1.3 \ 1.6]^T$, $y(0) = [3 \ 5 \ 5]^T$ и $z(0) = [-3 \ -3 \ -3]^T$, като и трите набора са избрани произволно.

На фиг. 3 са представени получените функции на разсъгласуване (13÷15), които графично потвърждават настъпването на режим на глобална хаотична синхронизация около петата секунда от преходния процес.



Фиг. 3. Функции на разсъгласуване e_{ij} , $i, j = 1 \div 3$



Фиг. 4. Съвместната динамика на променливите на трите хаотични системи.

От фиг. 4, на която е показана съвместната динамика на променливите на трите хаотични системи $x_i(t)$, $y_i(t)$ и $z_i(t)$ $i = 1 \div 3$, става ясно, че след края на преходния процес състоянията на трите системи стават напълно идентични.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основата на втория метод за устойчивост на Ляпунов, успешно е получено синхронно поведение на три идентични хаотични системи. Синтезираната хаотична синхронизационна схема на база три идентични глобално синхронизирани хаотични системи, може да се разглежда като една многостепенна хаотична система, която лесно може да се внедри в система за защитени комуникации. Представения подход може да се приложи при синхронизация на повече от три хаотични системи. Посредством някои леки корекции, синтезираната хао-

тична синхронизационна схема може да се изгради на база три хиперхаотични системи. Това ще доведе до повишаване на нивото на защита при изграждане на система за защитени комуникации.

REFERENCE

- [1] Р. Радев, Хаос и управление, Габрово 2004г.
- [2] S. Boccaletti, C. Grebogi, "The control of chaos: theory and applications", Physics Reports, vol. 329, pp. 103-197, 2000.
- [3] Y. N. Li, L. Chen, Z. S. Cai, X. Z. Zhao, "Experimental study of chaos synchronization in the Belousov-Zhabotinsky chemical system," Chaos, Solitons & Fractals, vol. 22, no. 4, pp. 767-771, 2004.
- [4] B. Blasius, A. Huppert, and L. Stone, "Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological system," Nature, vol. 399, pp. 354-359, 1999.
- [5] Nowak, M. A., May, R. M. (1992). Evolutionary games and spatial chaos. Nature, 359(6398), 826-829.
- [6] S. Qu, X. Wang, M. Gong, "Secure Communication Based on Synchronization of Unified Chaotic Systems," International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing, pp. 1336 – 1339, 2008.
- [7] Pecora, L., Carroll, T., "Synchronization in chaotic systems," Physical Review Letters, vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [8] Pecora, L. *et.al.* Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. Chaos 7(4), 1997, pp.520-543.
- [9] Vaidyanathan, S. "A novel 3-D jerk chaotic system with three quadratic nonlinearities and its adaptive control." Archives of Control Sciences 26.1, 2016: pp. 19-47.