МЕТОДИКА ЗА СИНТЕЗ НА ПЕРФЕКТНИ ФАЗОВО МАНИПУЛИРАНИ СИГНАЛИ С ДЪЛЖИНА N=3MOD4

Пламен Янакиев[1], Цветослав Цанков[2]
[1] *Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“*
[2] *Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“*

METHODOLOGY FOR SYNTHESIS OF PERFECT PHASE MANIPULATED SIGNALS WITH LENGTH N=3MOD4

Plamen Yanakiev[1], Tsvetoslav Tsankov[2]
[1] *Konstantin Preslavsky University of Shumen*
[2] *Konstantin Preslavsky University of Shumen*

Abstract
The phase manipulated (PM) signals which periodic autocorrelation functions (PACF) have small side-lobes are very important for the radars, sonars, radio-navigation and radio-synchronization systems. Due to this reason in the paper a general methodology for synthesis of perfect binary PM signals with lengths N=3mod4, N prime, is suggested. The results, obtained in the paper, could be applied in the process of development of new radio-communication devices, used for precise measurement of distances.

Keywords: ideal periodic autocorrelation functions; phase manipulated signals; synthesis of signals.

ВЪВЕДЕНИЕ

Бинарните фазово манипулирани (ФМ) сигнали, чиито периодични автокорелационни функции (ПАКФ) имат идеална форма, наподобяваща делта импулс, намират широко приложение в радио-локационните, радио-навигационните и радио-синхронизаращите системи. Основната причина за това е, че контрастът между основния (централния) лист и страничните листа на ПАКФ определя разделителната способност и полезния ефект от разделната обработка с последващо натрупване на радио сигналите, преминали по различни пътища [1].

Предвид на положителните им свойства, бинарните ФМ сигнали, чиято ПАКФ е подобна на делта импулс, са обект на интензивни изследвания през последните шестдесет години. Въпреки приложените усилия редица въпроси от тяхната теория са неизяснени и до днес [1], [2], [3]. Отчитайки тази ситуация, целта на доклада е да се направи детайлен анализ на класическия метод за синтез на така наречените сигнали на Льожандър, който да послужи за основа за разработването на компютърна програма за автоматизиран синтез на широк спектър ФМ сигнали и да доведе до изясняване на връзката между бинарните перфектни ФМ сигнали на Льожандър и на би-унимодуларните последователности на Бьорк с дължина $N = p \equiv 3\ mod 4$, p е просто число.

АНАЛИЗ НА КЛАСИЧЕСКИЯ МЕТОД ЗА СИНТЕЗ НА ПЕРФЕКТНИ БИНАРНИ ФАЗОВО МАНИПУЛИРАНИ СИГНАЛИ С ДЪЛЖИНА N=3 MOD4

Още през 50-те години на миналия век е доказана следната теорема [2].

Теорема 1: Нека

$$\{s(i)\}_{i=0}^{N-1} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\},$$
$$\forall s(i) \in \{-1, 1\}, \tag{1}$$

е бинарен *фазово манипулиран* (ФМ) сигнал с дължина N. Тогава неговата ПАКФ отговаря на условието

$$Q_{ss}(r) \equiv N\, mod 4,\ r = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2}$$

Доказателство: Както е известно, ПАКФ на ФМ сигнала (1) се изчислява по формулата [1], [2], [3]

$$Q_{ss}(r) = \sum_{i=0}^{N-1} s(i) s^*\langle i + r\rangle_N. \tag{3}$$

В (3) символите „$\langle i + r\rangle_N$" и „$*$" означават „*привеждане на сумата* (*в скобите*) *по* $mod\, N$" и „*комплексно спрягане*" съответно, а параметърът r показва, че *времевото отместване* (*time shift*) между сигналите $\{s(i)\}_{i=0}^{N-1}$ и $\{s^*(i)\}_{i=0}^{N-1}$ е $r\Delta t$. Освен това в (3) е отчетено, че в цифровите системи за обработка на информация периодът Δt на синхронизиращите *тактови импулси* (*clock pulses*) е константа за цялата система и по тази причина не се изписва в повечето формули.

От (3) се вижда, че при $r = 0$ теоремата е изпълнена, тъй като

$$Q_{ss}(0) = \sum_{i=0}^{N-1} s(i) s^*(i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} (\pm 1)^2 = N. \tag{4}$$

Нека сега $r \neq 0$, а броят на отчетите на ФМ сигнала, които са -1, е K_-. Тогава (очевидно) броят на отчетите +1 е

$$K_+ = N - K_-. \tag{5}$$

При $r \neq 0$ произведенията $s(i)s^*\langle i + r\rangle_N$ формират следните 4 групи

Табл. 1: *Типове на групите от произведения* $s(i)s^*\langle i + r\rangle_N$

$\boldsymbol{s(i)s^*\langle i+r\rangle_N}$	**Брой на произведенията в групата**
$(-1)(-1)$	$\boldsymbol{\lambda(r)}$
$(-1)(+1)$	$\boldsymbol{K_- - \lambda(r)}$
$(+1)(-1)$	$\boldsymbol{K_- - \lambda(r)}$
$(+1)(+1)$	$\boldsymbol{K_+ - [K_- - \lambda(r)] =}$ $\boldsymbol{= N - 2K_- + \lambda(r)}$

В табл. 1 с $\lambda(r)$ е означен броят на произведенията $(-1)(-1)$ при времево отместване $r\Delta t$.

От (3) и табл. 1 се вижда, че

$$Q_{ss}(r) = [N - 2K_- + \lambda(r) + \lambda(r)] -$$

$$-2[K_- - \lambda(r)] = N - 4[K_- - \lambda(r)] \equiv$$

$$\equiv N mod 4. \tag{6}$$

От Теорема 1 следва, че възможните минимални нива на страничните листа на ПАКФ на бинарните ФМ сигнали са [2], [3]

$$Q_{ss}(r) = \begin{cases} 0, & N \equiv 0\, mod 4, \\ 1, & N \equiv 1\, mod 4, \\ \pm 2, & N \equiv 2\, mod 4, \\ -1, & N \equiv 3\, mod 4. \end{cases} \tag{7}$$

Бинарните ФМ сигнали, чиито всички странични листа на ПАКФ имат нивата (7), е прието да се наричат *перфектни* (*perfect*).

Синтезът на перфектни бинарни ФМ сигнали е сложен теоретичен проблем, който въпреки интензивните научни изследвания през последните шестдесет години все още не е решен изчерпателно [2], [3]. Предвид на това следва да се отбележи, че исторически първият метод за синтез на перфектни ФМ сигнали е разработен за случая $N \equiv 3\, mod 4$. Той се описва от следната теорема [2], [3].

Теорема 2: Бинарният ФМ сигнал, чиято дължина е просто нечетно число

$$N = p \equiv 3\, mod 4, \tag{8}$$

а отчетите му са формирани по правилото (за кодиране)

$$s(0) = \pm 1,\ \ s(i) = (-1)^{ind_\theta i}, \tag{9}$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

е перфектен.

Доказателство: Както е известно, индексът на i по отношение на *примитивния елемент* (*корен*) θ на полето на Галоа $GF(p)$ $ind_\theta i$ е аналог на операцията логаритмуване (в безкрайните алгебрични полета). По-конкретно, във всяко крайно алгебрично поле $GF(p^n)$ съществува най-малко един примитивен елемент θ, който се характеризира с това, че редицата

$$\theta^1 = \theta, \theta^2, \dots, \theta^{p^n - 1}, \tag{10}$$

съдържа всичките $p^n - 1$ ненулеви елементи на $GF(p^n)$. По тази причина, в случаите на прости алгебрични полета, когато $n = 1$, редицата

$$\theta^1 = \theta, \theta^2, \dots, \theta^{p-1}, \tag{11}$$

е просто някаква пермутация

$$\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p-1), \tag{12}$$

на числата

$$1, 2, \dots, p-1. \quad (13)$$

Следователно индексът на i по отношение на примитивния елемент (корен) θ се определя от равенствата

$$i = \theta^{\pi(i)} \rightarrow ind_{\theta} i =$$

$$= \pi(i), \;\; i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (14)$$

От (8) и (14) се вижда, че ПАКФ на ФМ сигнала (9) е

$$Q_{ss}(r) = \sum_{i=0}^{p-1} s(i) s^{*} \langle i + r \rangle_p = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi(i+r)} + s(0)(-1)^{\pi(r)}. \quad (15)$$

От сумата в дясната част на (15) трябва да се изключи и произведението $(-1)^{\pi(p-r)}(-1)^{\pi[(p-r)+r]}$, тъй като в $GF(p)$ е изпълнено $(p-r)+r = p = 0$ и стойността на $\pi(0)$ е неопределена. Следователно

$$Q_{ss}(r) = \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi(i+r)} +$$

$$+ s(0)(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)} s(0). \quad (16)$$

Сумата в дясната част на (16) може да се преработи както следва

$$\sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi(i+r)} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi[i(1+ri^{-1})]}. \quad (17)$$

Тук следва да се отчете, че $ind_{\theta} i = \pi(i), \;\; i = 1, 2, \dots, p-1$ е аналог на операцията логаритмуване, т.е. ако

$$a = \theta^{\pi(a)}, \;\; b = \theta^{\pi(b)}, \quad (18)$$

тогава

$$ab = \theta^{\pi(ab)} = \theta^{\pi(a)+\pi(b)} \rightarrow \pi(ab) =$$

$$= \pi(a) + \pi(b). \quad (19)$$

Следователно

$$\sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi[i(1+ri^{-1})]} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(i)} (-1)^{\pi(i)+\pi(1+ri^{-1})} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{2\pi(i)} (-1)^{\pi(1+ri^{-1})} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} [(-1)^2]^{\pi(i)} (-1)^{\pi(1+ri^{-1})} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(1+ri^{-1})}. \quad (20)$$

След отчитането на (20) в (17) и (16), резултатът е

$$Q_{ss}(r) = \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq p-r}}^{p-1} (-1)^{\pi(1+ri^{-1})} +$$

$$+ s(0)(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)} s(0). \quad (21)$$

Сега следва да се забележи, че когато индексът i преминава последователно през елементите на множеството

$$\{1, 2, \dots, p-r-1, p-r+1, \dots, p-1\}, \quad (22)$$

изразът $1 + ri^{-1}$ преминава през елементите на множеството

$$\{\, 2, \dots, p-r-1, p-r, p-r+1, \dots$$

$$\dots, p-1\}. \quad (23)$$

Действително, първо, изразът $1 + ri^{-1}$ трябва да е елемент на $GF(p)$, т.е.

$$(1 + ri^{-1}) \in \{\, 0, 1, \;2, \dots, p-1\}. \quad (24)$$

Второ, когато индексът i преминава последователно през елементите на множеството (22) изразът $1 + ri^{-1}$ не приема повтарящи се стойности, тъй като

$$1 + ri_1^{-1} = 1 + ri_2^{-1} \rightarrow i_1^{-1} =$$

$$= i_2^{-1} \rightarrow i_1 = i_2. \quad (25)$$

При това изразът $1 + ri^{-1}$ "пропуска" елементите 0 и 1, защото

$$1 + ri^{-1} = 0 \rightarrow i - r = 0 \rightarrow i = p - r, \quad (26)$$

$$1 + ri^{-1} = 1 \rightarrow ri^{-1} = 0 \rightarrow i^{-1} =$$

$$= 0 \cup r = 0. \quad (27)$$

Накрая трябва да се забележи, че в множеството

$$\{\, 1, 2, \dots, p-1\} \quad (28)$$

има по $(p-1)/2$ числа с четен и нечетен индекс, и, освен това, съгласно теоремата на *Ферма-Ойлер* е изпълнено

$$\theta^{p-1} = 1 \rightarrow (-1)^{\pi(1)} = (-1)^{p-1} = 1. \quad (29)$$

Следователно

$$Q_{ss}(r) = \tfrac{p-1}{2}(-1) + \left(\tfrac{p-1}{2} - 1\right)(+1) +$$

$$+ s(0)(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)} s(0) =$$

$$= -1 + s(0)\left[(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)}\right]. \quad (30)$$

Изразът в скобите в дясната страна на (30) се опростява след отчитане на съотношенията

$$\pi(p-r) = \pi(-r) = \pi(-1) + \pi(r), \quad (31)$$

и, освен това,

$$\pi(-1) = \frac{p-1}{2} \equiv -1\, mod p, \quad (32)$$

когато $p \equiv 3\, mod 4$. Действително

$$p \equiv 3\, mod4 \to p = 4n + 3 \to \frac{p-1}{2} =$$

$$= 2n + 1 \equiv 1 mod 2. \quad (33)$$

Следователно

$$Q_{ss}(r) =$$

$$= -1 + s(0)\left[(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)}\right] =$$

$$= -1 +$$

$$+ s(0)\left[(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\pi(r)}\right] =$$

$$= -1 + s(0)(-1)^{\pi(r)}(1-1) = -1. \quad (34)$$

Не е трудно да се провери, че Теорема 2 остава в сила, ако отчетите на ФМ сигнала с дължина $p \equiv 3\, mod 4$ са формирани по правилото (за кодиране)

$$s(0) = \pm 1, \;\; s(i) = (-1)^{ind_\theta i + 1}, \quad (35)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1.$$

В теоретичните изследвания са доказани следните свойства на крайните алгебрични полета $GF(p^n)$ [4].

Свойство 1: Индексите на елементите на $GF(p^n)$ съществено зависят от избрания примитивен елемент (т.е. от „базата“ на индексите).

Свойство 2: При всеки примитивен елемент индексите на 1 и $-1 = p - 1$ са:

$$ind_\theta 1 = p^n - 1, \;\; ind_\theta(-1) = \frac{p^n - 1}{2}. \quad (36)$$

Това свойство следва от споменатата погоре *Теорема на Ферма-Ойлер*, съгласно която

$$\alpha^{p^n - 1} = 1, \;\; \alpha \in GF(p^n). \quad (37)$$

Ако α е произволен елемент на $GF(p^n)$, тогава

$$\alpha^{\varepsilon(a)} = 1, \quad (38)$$

като тук $\varepsilon(a)$ е нетривиален делител на $p^n - 1$. Прието е $\varepsilon(a)$ да се нарича *експонента* или *ред* на α в $GF(p^n)$.

В случаите, когато $\alpha = \theta$ е някой от примитивните елементи на $GF(p^n)$, тогава $\varepsilon(a) = p^n - 1$. Сега следва да се забележи, че

$$(-1)(-1) = \theta^{\pi(p-1)}\theta^{\pi(p-1)} =$$

$$= 1 = \theta^{p^n - 1}. \quad (39)$$

Следователно, $ind_\theta(-1) = \frac{p^n - 1}{2}$, както вече беше посочено в (36).

Свойство 3: Елементите на $GF(p^n)$ могат да се разделят на непресичащи се класове

$$C_{cl}(0) = \{0\},$$

$$C_{cl}(l) = \theta^{l-1}\left\{\theta^{0.d}, \theta^{1.d}, \dots, \theta^{(m-1)d}\right\},$$

$$l = 1, 2, \dots, d, \quad (40)$$

като тук

$$md = p^n - 1 \quad (41)$$

е някое от възможните разлагания на $p^n - 1$ в произведение на два множителя m, d.

Свойство 4: При разбиването на елементите на $GF(p^n)$ на непресичащи се класове по правилото (40) при фиксирани стойности на множителите m, d класът $C_{cl}(1)$ не зависи от конкретния избор на примитивен елемент.

Свойство 4 може да се обясни с факта, че всеки елемент на класа $C_{cl}(1)$ е точна d-та степен на някой елемент от $GF(p^n)$, т.е.

$$\beta \in C_{cl}(1) \leftrightarrow \beta = a^d, \;\; a \in GF(p^n). \quad (42)$$

Следователно, Теорема 2 може да се преформулира по следния начин [2].

Теорема 2А: Бинарният ФМ сигнал, чиято дължина е просто нечетно число

$$N = p \equiv 3\, mod 4, \quad (43)$$

а отчетите му са формирани по правилото (за кодиране)

$$s(0) = \pm 1, \;\; s(i) = \begin{cases} 1, & i = a^2, \\ -1, & i \neq a^2, \end{cases} \quad (44)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

е перфектен.

Както е известно, числата, които са точни квадрати на някое число в $GF(p)$ се наричат *квадратични остатъци*, а числата, които не са точни квадрати на някое число в $GF(p)$ се наричат *квадратични неостатъци*. В тази връзка *Льожандър* (*Адриен Мари Льожандър* (1752–1833), *Adrien-Marie Legendre*) е въвел следния символ, който днес носи неговото име (*символ на Льожандър*) [4]

$$\left(\frac{i}{p}\right) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 1, & i = a^2, \\ -1, & i \neq a^2, \end{cases} \quad i,\ a \in GF(p). \tag{45}$$

От (45) се вижда, че правилото (за кодиране) (44) може да се запише във вида

$$s(0) = \pm 1,\ \ s(i) = \left(\frac{i}{p}\right)$$
$$i = 1, 2, \dots, p-1. \tag{46}$$

Предвид на изложеното до тук, перфектните ФМ сигнали, формирани по правилата (за кодиране) (9) или (35), се наричат *сигнали* (*последователности*) *на квадратичните остатъци* или *сигнали* (*последователности*) *на Льожандър*.

МЕТОДИКА ЗА СИНТЕЗ НА ПЕРФЕКТНИ БИНАРНИ ФАЗОВО МАНИПУЛИРАНИ СИГНАЛИ С ДЪЛЖИНА N=3MOD4

От анализа, направен в предходния параграф на доклада, се вижда, че класическият метод за синтез на ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 3\ mod4$ се основава на изчисляването на индексите на елементите на крайните алгебрични полета $GF(p^n)$. При големи стойности на p и n това е относително сложна изчислителна задача, която се решава на две стъпки. Първо се открива произволен примитивен примитивен елемент $\theta = \theta_1$, като се използва фактът, че редицата (10) съдържа всичките $p^n - 1$ ненулеви елементи на $GF(p^n)$. След това всички останали примитивни елементи $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s$ се изчисляват по формулата

$$\theta_l = \theta^{d_l},\ l = 2, 3, \dots, N_d, \tag{47}$$

като се спазват аритметичните законите на конкретното аритметично поле $GF(p^n)$. При това в (47)

$$\{d_1 = 1, d_2, d_3, \dots, d_{N_d}\}, \tag{48}$$

е множеството на всички числа, които са по-малки от $p^n - 1$ и са взаимно прости с $p^n - 1$.

В редица случаи изчисляването на индексите на елементите на крайните алгебрични полета се опростява в резултат на използване на таблици, съдържащи минималните по абсолютна стойност примитивни елементи за голям брой прости (неразширени) полета на Галоа $GF(p)$, които са публикувани в специализираната литература.

Предвид на изложеното следва специално да се отбележи, че Свойство 4 опростява изключително много синтезирането на сигнали на Льожандър с произволна дължина p. Действително, от (51) се вижда, че при зададено p за намиране на класа на квадратичните остатъци е достатъчно всички числа $\{1, 2, \dots, p-1\}$ да бъдат повдигнати на степен $d = 2$ по $mod\ p$, след което трябва да се вземе един пълен комплект от различни числа. Така например, при $p = 7$ квадратите на числата $\{1, 2, \dots, 6\}$ по $mod\ 7$ и квадратичните остатъци са

$$\left\{ \begin{matrix} 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = \\ = 2, 4^2 = 2, 5^2 = 4, 6^2 = 1 \end{matrix} \right\} \to \{1, 2, 4\}. \tag{49}$$

От направения анализ произтича коректността на следната методика.

Методика за синтез на перфектни бинарни фазово манипулирани сигнали с дължина $N = p \equiv 3\ mod\ 4$.

Стъпка 1: Задаване на дължината $N = p \equiv 3\ mod\ 4$ на ФМ сигнала.

Стъпка 2: Изчисляване на квадратите на всички числа $\{1, 2, \dots, p-1\}$ по $mod\ p$, т.е.

$$a_i \equiv i^2 mod\ p,\ i = 1, 2, \dots, p-1. \tag{50}$$

Стъпка 3: От числата a_i, изчислени на предходната стъпка, се взема един пълен комплект от $N_a = (p-1)/2$ на брой различни числа. Този комплект представлява класа

$$d = 2,\ C_{cl}(1) = \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{N_a - 1}}\} \tag{51}$$

на квадратичните остатъци по $mod\ p$.

Стъпка 4: Отчетите на бинарния ФМ сигнал на Льожандър се изчисляват по правилото (за кодиране) (46).

Не е трудно да се провери (например за $p = 3, 7, 11$), че бинарните ФМ сигнали на Льжандър, синтезирани по обоснованата по-горе методика, са перфектни, т.е. всички странични листа на ПАКФ са точно -1 и, следователно, съответстват на ограниченията (7) за дължини $N \equiv 3\, mod\, 4$.

В редица практически случаи обаче е необходимо ПАКФ на ФМ сигналите изобщо да нямат странични листа. При $N \equiv 3\, mod\, 4$ това може да се постигне само чрез използване на фазова манипулация, която е по-сложна от бинарната. Например в литературата е посочено следното правило (за кодиране)

$$s(0) = 1,\;\; s(i) = \begin{cases} 1, & i = a^2, \\ x, & i \neq a^2, \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \dots, p-1,\;\; N = p \equiv 3\, mod\, 4 \qquad (52)$$

като тук x е комплексно число с модул 1:

$$x = cos\varphi + jsin\varphi = e^{j\varphi},\;\; j = \sqrt{-1}. \qquad (53)$$

Правилото (за кодиране) (53) е установено от *Г. Бьорк* (*G. Bjorck*) през 80-те години на миналия век [5], но в Интернет няма ресурс, съдържащ неговата обосновка. Предвид на тази ситуация следва да се отбележи, че анализът на класическия метод за синтез на перфектни бинарни ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 3\, mod\, 4$, направен в предходния параграф на доклада, създава предпоставките правилото (за кодиране) (53) да бъде доказано строго в [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

През изминалите петдесет години методите за синтез на ФМ сигнали са били разработвани най-често като решения на частни инженерни проблеми. Днес обаче теорията на синтеза на ФМ сигнали трябва да може да обясни свойствата на различните класове ФМ сигнали от възможно най-общи позиции. Предвид на тази необходимост в доклада е направен детайлен анализ на класическия метод за синтез на перфектни бинарни ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 3\, mod\, 4$. На тази основа са получени два основни резултата.

Първо, обоснована е методика за синтез на перфектни бинарни ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 3\, mod\, 4$, която се характеризира с простота, универсалност и ефективност от изчислителна гледна точка. Тя може успешно да бъде използвана за разработване на компютърна програма за автоматизиран синтез на широк спектър ФМ сигнали за радио-комуникационни системи за прецизно измерване на разстояния.

Второ, създадени са предпоставките за изясняване на връзката между бинарните перфектни ФМ сигнали на Льожандър и на би-унимодуларните последователности на Бьорк с дължина $N = p \equiv 3\, mod 4$, p е просто число.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата статия се реализира във връзка с Проект РД-08-144/08.02.2018 г. – Интегрирана развойна тестова среда за информационна сигурност, финансиран от ШУ „Епископ Константин Преславски“.

REFERENCE

[1] N. Levanon and E. Mozeson, Radar signals, Wiley-Interscience, 2004, 427 pp.

[2] S. Golomb and G. Gong, Signal design for good correlation for wireless communications, cryptography and radar, Cambridge University Press, 2005, 455 pp.

[3] V. P. Ipatov, Spread spectrum and CDMA. Principles and Applications, Willey, 2006. - 373 pp.(in Russian)

[4] R. Lidl and H. Niederreiter, Finite fields, London: Addison-Wesley Publishing Company, 1983, 818 pp.

[5] B. Saffari, Some polynomial extremal problems which emerged in the twentieth century, In: Twentieth century harmonic analysis-a celebration, pp. 201-233, Kluwer Academic Publishers, 2001

[6] B. Bedzhev and P. Yanakiev, A survey of methods for synthesis of ideal phase manipulated signals with length N=3 mod 4, In: Proceedings of the International scientific conference MATTECH 2018, 25-27.10.2018, Shumen, Bulgaria (in press)