



Основните типове съвременни системи за автоматизация имат такава предавателна функция. При тях  $Bn(p)$  е от по-висока степен от  $Am(p)$ , което е условие за физическа реализуемост.

Методът изисква при управлението да се наблюдава само входната координата  $u$  и изходната координата  $y$  (регулируемата величина).

Единствено ограничение на метода е поне един от свободните членове на двата полинома  $A$  и  $B$  да е 1 или да бъде приведен към единица (това условие в повечето реални обекти е спазено).

Съгласно теорията на управлението предавателната функция на обекта е свързана с главните координати на системата чрез съотношението:

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{y(p)}{u(p)}. \quad (4)$$

От изразите (4) и (1), като се развият полиномите  $A(p)$  и  $B(p)$ , се получава:

$$u(p) \cdot \sum_{i=0}^m a_i p^i = y(p) \cdot \sum_{j=0}^n b_j p^j. \quad (5)$$

Тук съгласно направената по-горе уговорка коефициентът  $b_0$  е единица.

При положение, че производните на координатите  $u$  и  $y$  са ненаблюдаеми, е необходимо те да бъдат изчислени. За целта е необходимо да се разполага с  $(m+1)$  стойности на величината  $u$  и  $(n+1)$  стойности на  $y$ .

## НАБЛЮДАТЕЛИ НА ПРОИЗВОДНИ

Наблюдателите на производни, използвани в този случай, са цифрови. В математиката са известни доста точни числени методи за наблюдатели на производни. Понеже в този случай се използва метод за оперативна идентификация, очевидно се касае за достатъчно малка стъпка във времето  $\Delta t$ , а това дава основание и най-простите методи за числено диференциране да гарантират достатъчна точност [5]:

-метод на крайните разлики (двучеткова схема) – представя се със съотношението:

$$P_{ij} = \frac{P_{i-1,j} - P_{i-1,j-1}}{\Delta t}, \quad (6)$$

където  $P_{ij}$  означава  $i^{ma}$  производна на параметъра  $p$  в момента  $j$  ( $t=j \cdot \Delta t$ ).

-метод на средната точка (треточкова схема), представен със съотношението:

$$P_{ij} = \frac{P_{i-1,j+1} - P_{i-1,j-1}}{2 \cdot \Delta t} \quad (7)$$

където  $i$  и  $j$  имат същия смисъл.

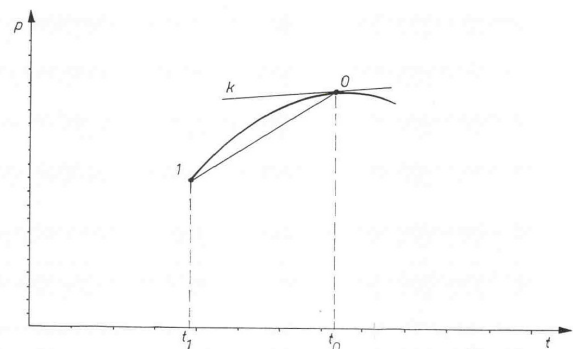
Първият метод може да генерира стойностите на производните във вид на триъгълна матрица, показана на табл. 1.

Необходимо е да се разполага с  $k+1$  стари стойности на параметъра  $p$ , за да се изчисли неговата  $k^{та}$  производна.

Същността на този метод е илюстрирана на фиг. 1

табл. 1.

$P_{0,14}$	$P_{0,13}$	$P_{0,12}$	$P_{0,11}$	$P_{0,10}$	$P_{0,9}$	$P_{0,8}$	$P_{0,7}$	$P_{0,6}$	$P_{0,5}$	$P_{0,4}$	$P_{0,3}$	$P_{0,2}$	$P_{0,1}$	$P_{0,0}$
	$P_{1,13}$	$P_{1,12}$	$P_{1,11}$	$P_{1,10}$	$P_{1,9}$	$P_{1,8}$	$P_{1,7}$	$P_{1,6}$	$P_{1,5}$	$P_{1,4}$	$P_{1,3}$	$P_{1,2}$	$P_{1,1}$	$P_{1,0}$
		$P_{2,12}$	$P_{2,11}$	$P_{2,10}$	$P_{2,9}$	$P_{2,8}$	$P_{2,7}$	$P_{2,6}$	$P_{2,5}$	$P_{2,4}$	$P_{2,3}$	$P_{2,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,0}$
			$P_{3,11}$	$P_{3,10}$	$P_{3,9}$	$P_{3,8}$	$P_{3,7}$	$P_{3,6}$	$P_{3,5}$	$P_{3,4}$	$P_{3,3}$	$P_{3,2}$	$P_{3,1}$	$P_{3,0}$
				$P_{4,10}$	$P_{4,9}$	$P_{4,8}$	$P_{4,7}$	$P_{4,6}$	$P_{4,5}$	$P_{4,4}$	$P_{4,3}$	$P_{4,2}$	$P_{4,1}$	$P_{4,0}$
					$P_{5,9}$	$P_{5,8}$	$P_{5,7}$	$P_{5,6}$	$P_{5,5}$	$P_{5,4}$	$P_{5,3}$	$P_{5,2}$	$P_{5,1}$	$P_{5,0}$
						$P_{6,8}$	$P_{6,7}$	$P_{6,6}$	$P_{6,5}$	$P_{6,4}$	$P_{6,3}$	$P_{6,2}$	$P_{6,1}$	$P_{6,0}$
							$P_{7,7}$	$P_{7,6}$	$P_{7,5}$	$P_{7,4}$	$P_{7,3}$	$P_{7,2}$	$P_{7,1}$	$P_{7,0}$
								$P_{8,6}$	$P_{8,5}$	$P_{8,4}$	$P_{8,3}$	$P_{8,2}$	$P_{8,1}$	$P_{8,0}$
									$P_{9,5}$	$P_{9,4}$	$P_{9,3}$	$P_{9,2}$	$P_{9,1}$	$P_{9,0}$
										$P_{10,4}$	$P_{10,3}$	$P_{10,2}$	$P_{10,1}$	$P_{10,0}$
											$P_{11,3}$	$P_{11,2}$	$P_{11,1}$	$P_{11,0}$
												$P_{12,2}$	$P_{12,1}$	$P_{12,0}$
													$P_{13,1}$	$P_{13,0}$
														$P_{14,0}$

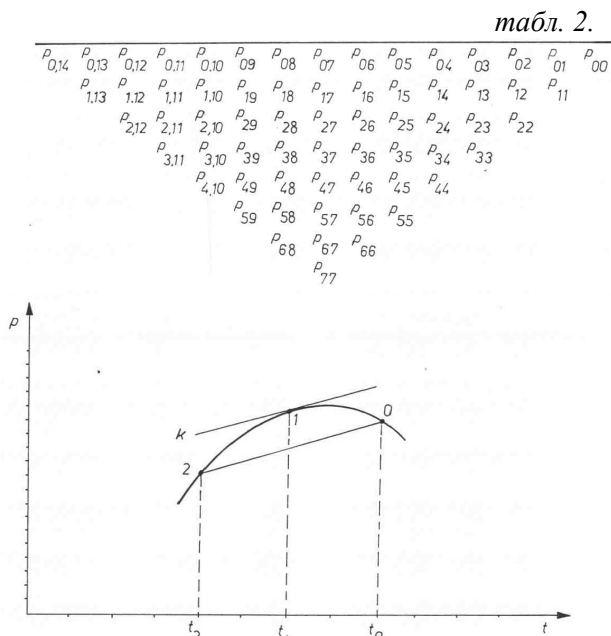


Фиг. 1 Производната по двучеткова схема

Този метод обуславя грешка, свързана с невъзможността за паралелност между хордата 0 – 1 от фиг. 1 и представяща търсената производна допирателна  $k$  към точка 0 на дъгата 0 – 1 (истинската стойност на търсената производна е пропорционална на наклона на допирателната, докато изчислената стойност е пропорционална на наклона на хордата).

Вторият метод генерира стойностите на производните във вид на двойно отсечена триъгълна матрица (табл. 2).

Обемът на събраната информация и тук е същият. Точността, обаче, е много по-висока – фиг. 2.



Фиг. 2 Производната по триточкова схема

По-високата точност означава, че успоредността между хордата 0 – 2 и допирателната в точка 1 е много по-голяма и това е съществено предимство. За съжаление самият метод изисква процедури за възстановяване на липсващите елементи от отсечения долен десен ъгъл в табл. 2, които да осигурят текущи стойности на старшите производни.

Общият брой на неизвестните параметри на системата е  $(m+n+1)$ . Ако след направените  $(m+n+2)$  измервания, необходими за възстановяване на производните в уравнение (5), се направи още едно измерване на  $u$  и  $y$ , ще се създаде ново уравнение от типа на (5).

По този начин с общо  $2.(m+n+1)$  измервания може да се конструира система от  $(m+n+1)$  уравнения с толкова неизвестни параметъра, чието решаване е рутинно, тъй като системата е определена [5].

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА

Като пример ще бъде разгледан обект от  $2^{ru}$  ред – електрозадвижване с праволиней-

на механична характеристика, напр. с двигател за постоянен ток с независимо възбуждане [6]. Предавателната функция при входна координата подадено напрежение на намотката на котвата и изходна координата ъглова скорост е от следния вид:

$$W(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{\omega(p)}{U(p)} \quad (8)$$

където  $a_0 = \frac{1}{c}$ ;  $b_0 = 1$ ;  $b_1 = T_M$ ; и

$$b_2 = T_a \cdot T_M$$

$T_a$  е електромагнитната времеконстанта;

$T_M$  – механичната времеконстанта;

$c$  - коефициент на електромагнитно взаимодействие.

За простота на записите по-нататък ще се означават координатите и техните производни с по два индекса – първият за реда на производната, вторият – за поредния номер на измерването. Напр.  $y_{23}$  ще означава „втора производна на величината  $y$  в момента на третото измерване”.

По този начин за конкретния случай се получава система от три уравнения, доколкото неизвестните са три –  $T_a$ ,  $T_M$  и  $\frac{1}{c} = k$ . Тъй като е необходима втора производна на  $\omega$ , общият брой измервания ще бъде  $2.(0+2+1)=6$ :

В случая по време на управлението се наблюдават само напрежението на котвата и скоростта на въртене в реално време, което означава че в два последователни интервала от време се отчитат двете стойности и от тях може да се вади заключение за производната. Така се извършва едновременна идентификация на времеконстантите и коефициента на звеното  $T_a$ ,  $T_M$  и  $\frac{1}{c} = k$ . Системата уравнения, които се описват по този начин е следната:

$$\begin{cases} T_a T_M \omega_{21} + T_M \omega_{11} - \frac{1}{c} U_{01} = \omega_{01} \\ T_a T_M \omega_{22} + T_M \omega_{12} - \frac{1}{c} U_{02} = -\omega_{02} \\ T_a T_M \omega_{23} + T_M \omega_{13} - \frac{1}{c} U_{03} = -\omega_{03} \end{cases} \quad (9)$$

Системата уравнения (9) е определена, когато векторът на свободните членове от дясно не е равен на нула. Тогава системата има определено решение.

С цел съкращаване на записите системата (9) се представя в матричен вид:

$$Ax = b \quad \det A \neq 0 \quad (10)$$

$A$  е неособена матрица, понеже  $\det A \neq 0$ . В такъв случай общото решение на системата е от вида:

$$\begin{array}{ccc} A \cdot x = b & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = & A^{-1} \cdot b \end{array} \quad (11)$$

Решението по схемата на (11) е бавно, доколкото е свързано с обръщането на матрицата  $A$ . На практика в преобладаващия брой случаи могат да се използват много по-бързи методи за целта, като най-често те са разновидности на метода на Гаус.

При методът на Гаус – Джордан действията схематично изглеждат така:

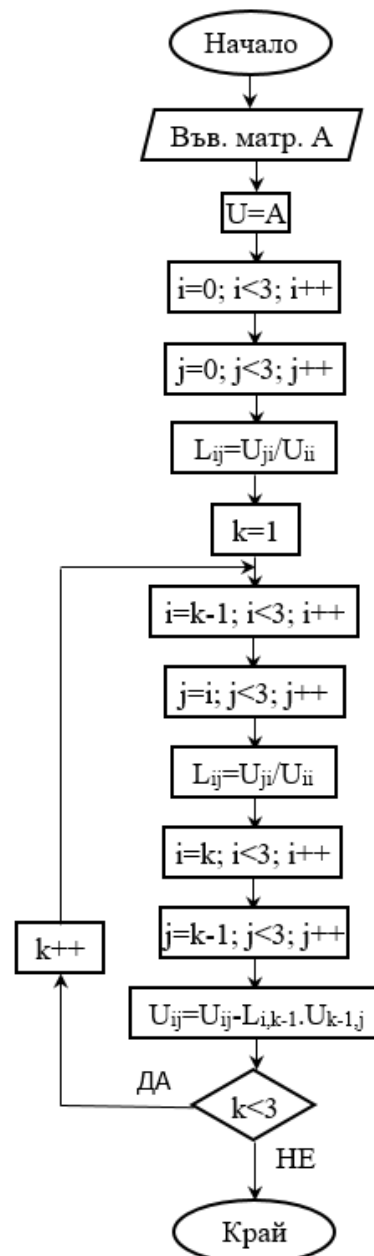
$$\begin{array}{ccc} A \cdot x = b & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1] \cdot x = d \end{array} \quad (12)$$

Тук  $A$  е матрица на системата уравнения,  $x$  е вектор на неизвестните параметри,  $b$  е вектор на свободните членове,  $d$  – вектор на получените след преобразувания свободни членове.

Друг подход за решаване на системата от (10) е методът на  $L - U$  разложението, при който матрицата  $A$  се представя във вида  $A=L \cdot U$ . Тук  $L$  е долно-триъгълна матрица с единичен диагонал, а  $U=A$ :

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{2,3} & l_{3,3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Алгоритъмът за решаване на системата от (10) по метода на  $L - U$  разложението е показан на фиг. 3.



Фиг. 3. Алгоритъм на  $L-U$  разложението

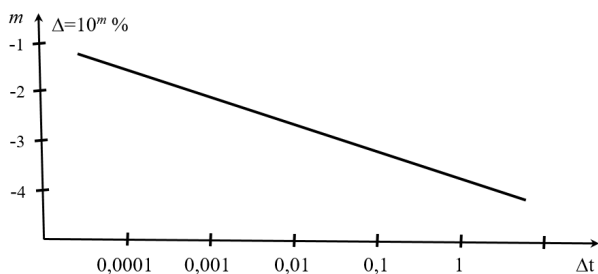
Целта на системата уравнения (9) е да се определят стойностите на величините  $T_a$ ,  $T_M$  и  $c$  в реално време. Определянето им дава възможност така да се планира управлението  $U(p)$ , че регулираните параметри да съответстват на изискванията за оптимална работа на задвижването.

### ТОЧНОСТ НА МЕТОДА

При този метод за оперативна идентификация точността зависи от стъпката на дискретизация на времето за отделните измервания. Много малката стъпка увеличава точността на наблюдателя, формиращ

производните, но влошава точността на решението – при безкрайно намаляване на интервала между две измервания, те дават еднакъв резултат. Обратно – увеличаването на стъпката прави точна системата и неточен наблюдателя на производните.

На фиг. 4 е показана зависимостта между грешката и стойността на стъпката за разглеждания случай. Когато стъпката на дискретизация  $\Delta t$  клони към нула изходните величини са по-слабо изменими – параметрите се превръщат в константи, т.е. свободния коефициент е един и същ. В този случай не може да се запишат три различни уравнения за трите неизвестни. Именно поради това с намаляване на стъпката на дискретизация грешката се увеличава.



Фиг. 4. Зависимост между стъпка и грешка

При обекти, съдържащи не три, а два неизвестни параметъра (напр. апериодично, реално диференциращо или реално форсиращо звено), точността нараства с два-три порядъка.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Създаден е оригинален метод за бързо и точно определяне в режим на реално време на неизвестните параметри на динамиката на система за автоматизация с предавателна

функция от дробно рационален тип, с което се покриват почти всички възможни случаи на математическо описание на такива системи.

Методът е верифициран чрез разглеждане на постояннотоково електро-завдвижване с линейна механична характеристика (с двигател с независимо възбуждане). В този случай се наблюдават в реално време само два лесни за измерване параметъра – котвеното напрежение и скоростта на въртене. В зависимост от необходимата точност се избира подходящ период на дискретизация и се извършва идентификация на параметрите на задвижването с цел постигане на оптимална работа (по предварително зададен критерий).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dorf R., R. Bishop, Modern Control Systems, 12<sup>th</sup> Ed., New York: Prentice Hall, 2011.
- [2] F. Golnaraghi, B.C. Kuo, Automatic Control Systems, 10<sup>th</sup> Ed., New York: McGraw-Hill Education, 2017.
- [3] Dimitrova E., Synthesis of systems for monitoring and control on complex technical objects that aimed to ensure maximum efficiency, Acad. J. MTC, Vol. 12, Issue 3/2, art. ID 1030, 2014
- [4] Dimitrova E., G. Cherneva, Modeling of the control process of technical systems, Acad. J. MTC, Vol. 11, Issue 3, art. ID 877, 2013
- [4] Larson R., D. Falvo, Elementary Linear Algebra, USA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.
- [6] Bakshi U., M. Bakshi, Electrical Drives and Control, India: Technical Publications Pune, 2009.