

**МАЩАБИРАНА АНТИ-СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕЖДУ ДВЕ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ ОТ ТРЕТИ РЕД С ДВОЙНИ АТРАКТОРИ****Драгомир Чантов<sup>1</sup>, Христина Стойчева<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Технически университет - Габрово**SCALED ANTI-SYNCHRONIZATION BETWEEN TWO THIRD-ORDER CHAOTIC SYSTEMS WITH DOUBLE ATTRACTORS****Dragomir Chantov<sup>1</sup>, Hristina Stoycheva<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Technical University of Gabrovo**Abstract**

*The subject of this paper is the design of chaotic synchronization scheme, which combines two different types of complex synchronizational behavior between two chaotic systems, namely anti-synchronization and scaled synchronization. By the former type, if successful synchronization between the systems is achieved, they run on mirror-type attractors in the state space, while by the latter type of synchronization the attractor of one of the systems is a scaled copy of that of the other system. Combining the two principles of synchronization gives more complex synchronizational behaviour of the systems, which is an advantage, if this scheme is used for secure data transmission or data encrypting. The chaotic model, chosen for the basis of the synchronization scheme, is a novel two-attractor system, proposed in 2021.*

**Keywords:** chaotic systems; chaotic synchronization; scaled synchronization; anti-synchronization.

**ВЪВЕДЕНИЕ**

Нелинейните системи са твърде разнообразни по своята природа и динамично поведение. Методите за анализ и синтез при различните класове нелинейни системи могат да се различават значително. През последните десетилетия се наблюдава силен научен интерес към един специфичен клас нелинейни системи – тези с хаотично поведение. Това са системи, обикновено описвани с прости нелинейни детерминирани уравнения от нисък ред, които се характеризират със силна чувствителност към началните условия и притежават странен атрактор в пространството на състоянието. Както задачите за анализ, така и тези за синтез на различни видове управление към такива системи, силно се отличават като методология спрямо сходните задачи при системите с нехаотичен характер.

Големият научен интерес към хаотичните системи е продиктуван от няколко фактора. На първо място това е факта, че

хаотични системи се срещат в почти всички технически и нетехнически научни области, като електроника, химия, екология и много други [1]. При някои системи хаосът е вреден и трябва да се синтезира управление, което да го елиминира, а при други – полезен и съответно синтезираното към такава система управление трябва да поддържа хаоса в системата или дори изкуствено да хаотифицира една първоначално нехаотична система. Друго основно направление в теорията на хаоса са задачите за синтез на синхронизационни схеми между две или повече хаотични системи [2]. Тук целта е да се синтезира управление, с помощта на което динамиката на едната хаотична система да бъде синхронизирана по даден закон с динамиката на другата. На основата на такива синхронизационни схеми се създават системи за защитени комуникации, както и системи за криптиране на данни, при които най-общо полезният сигнал се кодира с хаотична компонента [3].

При реализирането на системи за защита на данни с хаос важи правилото, че ако хаотичната синхронизационна схема, която се ползва за основа на системата, е с по-сложен тип синхронизирано движение между съставлящите я хаотични системи, може да се постигне по-висока степен на защита на данните. Основният и най-популярен тип хаотична синхронизация е идентичната, при която при успешно реализирана синхронизация системите извършват идентични хаотични движения. Известни, но по-слабо изследвани, са и други типове хаотична синхронизация, като изместена, осцилираща, хибридна, мащабирана и анти-синхронизация. При мащабираната синхронизация атракторът на едната система е мащабно копие на атрактора на другата. При анти-синхронизацията атракторът на едната система е “огледално” копие спрямо координатните оси на пространството на състоянието на атрактора на другата система.

В настоящия доклад е синтезирана хаотична синхронизационна схема, която комбинира мащабирана синхронизация и анти-синхронизация. Синтезът на управляващите функции, с помощта на които се реализира това сложно синхронизирано движение, се извършва с помощта на втория метод за устойчивост на Ляпунов. Като основа е избран нов модел на хаотична система, представен за пръв път през 2021 г. и характеризиращ се с два различни атрактора, в зависимост от началните условия.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

В [4] е представен следният хаотичен модел, който е използван за управлението на роботизирана електромеханична система:

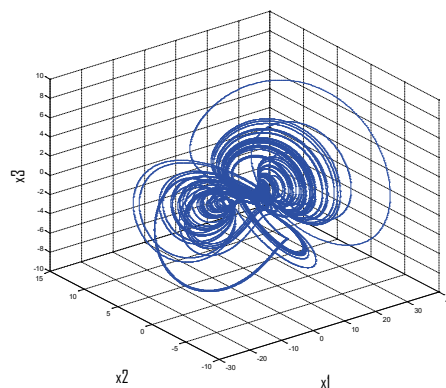
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 + a_2x_1x_3 + a_3x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_4x_2 - a_5x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -a_6x_3 + a_7x_1x_2 + a_8x_3^2, \end{aligned} \quad (1)$$

където при стойности на параметрите на система са:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2.3$ ,  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 1$ ,  $a_6 = 6$ ,  $a_7 = 1$ ,  $a_8 = -0.25$ .

За целите на настоящия доклад не е необходимо да се разглежда физическата при-

рода на системата, а тя да се приема само като математическа конструкция, генерираща хаос.

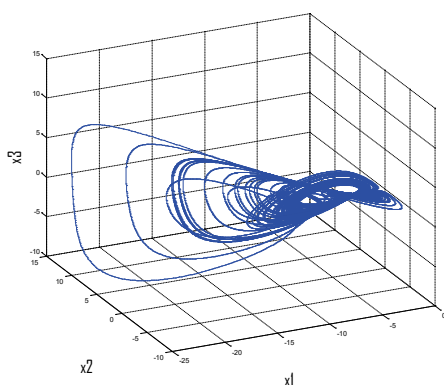
В [4] е установено, че системата (1) има 6 неустойчиви равновесни точки. Наличието на неустойчиви равновесни точки е необходимо, но не и достатъчно условие за наличието на хаос в системата. Интересна особеност на системата (1) е, че тя притежава различни хаотични атрактори в зависимост от стойността на параметъра  $a_8$  и началните условия. Системата е симулирана в среда на Matlab, като на фиг. 1 е показан атракторът на системата в пространството на състоянието  $(x_1, x_2, x_3)$  за  $a_8 = -0.25$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 1 \ 0]^T$ , където  $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T$ . Атракторът има типичния вид на хаотичен атрактор и се състои от теоретично безкраен брой неустойчиви периодични орбити, ограничени в ясно изразена геометрична структура.



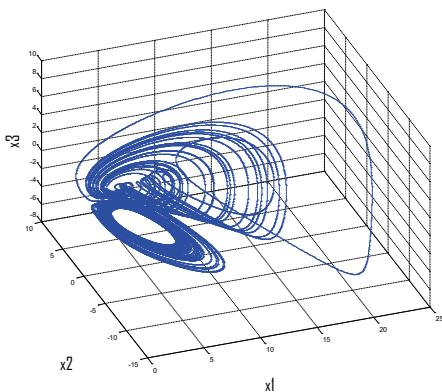
Фиг. 1. Хаотичен атрактор за  $a_8 = -0.25$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 1 \ 0]^T$

При промяна на параметъра  $a_8$  се наблюдава промяна на хаотичния атрактор, като особено ясно това е изразено за  $a_8 = 1.2$ . Нещо повече, при тази стойност на  $a_8$  в зависимост от знака на началното условие  $x_1(0)$ , атракторът е различен. Така, ако  $x_1(0) < 0$ ,  $x_1(t) < 0$  за  $t \rightarrow \infty$ , а ако  $x_1(0) > 0$ , то  $x_1(t) > 0$  за  $t \rightarrow \infty$ . На фиг. 2 е показан атракторът на системата (1) за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ -1 \ 0]^T$ , а на фиг. 3 - атракторът

на системата (1) за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$ . Очевидно е, че атракторите от фиг. 2 и 3 са различни от базовия атрактор на системата, показан на фиг. 1, както и че промяната само на знака на началното условие  $x_1(0)$  при  $a_8 = 1.2$  води до получаването на два съвсем различни помежду си хаотични атрактора, които се намират в две ясно обособени и непресичащи се подобласти на пространството на състоянието  $(x_1, x_2, x_3)$ , съответно  $x_1(t) < 0$  за атрактора от фиг. 2 и  $x_1(t) > 0$  за този от фиг. 3.



Фиг. 2. Хаотичен атрактор за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ -1 \ 0]^T$



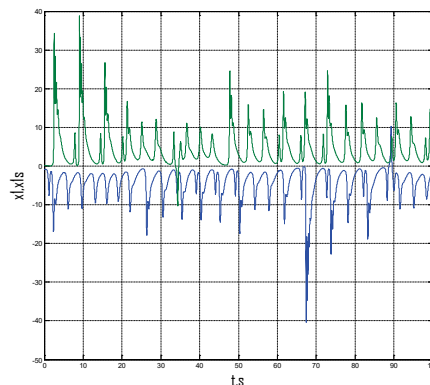
Фиг. 3. Хаотичен атрактор за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$

При задачите за хаотична синхронизация изходната база са две еднотипни хаотични системи, свързани помежду си. Така, в най-общ вид една синхронизационна схема на основата на представения модел от трети ред ще се състои от две инстанции на системата (1). Нека първата инстанция се описва с уравненията (1), а в най-общ вид втората инстанция ще бъде:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + a_3 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + g_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= a_4 \tilde{x}_2 - a_5 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + g_2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}), \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -a_6 \tilde{x}_3 + a_7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + a_8 \tilde{x}_3^2 + g_3(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (2)$$

където  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ ,  $i = 1 \div 3$  са управляващи функции, синтезирани от векторите на състоянието на двете системи:  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  и  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3]^T$ .

При така дефинираните хаотични системи (1) и (2), първата се нарича *управляваща* (Master), а втората – *подчинена* (Slave), т.е. връзката между двете хаотични системи е *еднопосочна* – от (1) към (2). При задачи за хаотична синхронизация наборът параметри  $a_i$  на двете системи трябва да е идентичен, а началните им условия – различни, т.е.  $\mathbf{x}(0) \neq \tilde{\mathbf{x}}(0)$ . Тогава, ако липсват управляващи функции към подчинената система ( $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = 0$ ,  $i = 1 \div 3$ ) двете системи ще извършват независими хаотични движения без функционална зависимост между тях. Например на фиг. 4 е показана съвместната динамика на променливите  $x_1(t)$  и  $\tilde{x}_1(t)$  за този случай, като началните условия са  $x_1(0) = -1$  и  $\tilde{x}_1(0) = 0.15$  и са избрани произволно. Аналогична е динамиката и на другите две двойки променливи. Хаотичните системи (1) и (2) са напълно идентични, но при липса на връзка между тях и разлика в началните условия извършват напълно различни хаотични движения.



Фиг. 4. Динамика на променливите  $x_1(t)$  и  $\tilde{x}_1(t)$  при липса на синхронизация

Целта при хаотичната синхронизация е така да се синтезират управляващите функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  към системата (2), че за

функциите от разсъгласуването  $e_i$  между двойките променливи на управляващата и подчинената системи да се изпълнява условието:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1 \div 3. \quad (3)$$

Самите функции на разсъгласуване се избират според вида на желаната тип синхронизация. Обикновено те са:

$$e_i = x_i - \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (4)$$

Тогава, при синтез на управляващи функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  с цел изпълнение на условието (3), между хаотичните системи (1) и (2) се получава *идентична синхронизация*, която е и най-популярния тип синхронизирано движение. При нея съответните двойки променливи на двете хаотични системи ще извършват идентични хаотични движения.

Ако функциите на разсъгласуване се избират във вида:

$$e_i = x_i + \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (5)$$

и се синтезират функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  така, че да се изпълнява (3), между хаотичните системи (1) и (2) се получава *анти-синхронизация*. При нея отделните двойки променливи на (1) и (2) ще извършват еднакви по модул, но с различен знак, движения.

Друг вариант за избор на функции на разсъгласуване е:

$$e_i = x_i - \alpha_i \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (6)$$

където  $\alpha_i$  са произволни константи. Ако за такива функции се намерят управления  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ , с които да се изпълнява (3), системите (1) и (2) ще са в режим на *мащабирана синхронизация*, която е по-слабо популярна и при която функционалната зависимост между двете синхронизирани хаотични системи е по-сложна спрямо предишните два вида синхронизирано движение. При нея атракторът на едната система е мащабно копие на атрактора на другата.

В настоящия доклад се предлага механизъм за получаване на още по-сложен вид хаотична синхронизация, а именно такава, при която функциите на разсъгласуване са комбинация от тези при анти-синхронизацията и тези при мащабираната синхронизация:

$$e_i = x_i + \alpha_i \tilde{x}_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (7)$$

При намиране на управляващи функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  към подчинената система (2), с мощта на които при така дефинираните функции на разсъгласуване (7) да се изпълнява условието за синхронизирано движение (3), ще се казва, че системите (1) и (2) са в режим на *мащабирана анти-синхронизация*, която ще представлява още по-сложно синхронизирано движение от това при анти-синхронизацията и при мащабираната синхронизация, които от своя страна са по-сложни от идентичната синхронизация.

Предлага се синтеза на управляващи функции за получаване на мащабирана анти-синхронизация да се реализира, като се използва втория метод за устойчивост на Ляпунов.

Нека трите функции на разсъгласуване (7) се обединят във вектора:

$$\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T. \quad (8)$$

Изпълнението на условието за синхронизация (3) ще съответства на установяването на системата от разсъгласуването между управляващата и подчинената системи в точката  $\mathbf{e} = 0$  в съответното пространство на състоянието на тази система. Ако точката  $\mathbf{e} = 0$  е устойчива, то между системите (1) и (2) ще има желаната вид синхронизация. За доказване на устойчивостта на точката  $\mathbf{e} = 0$  трябва да се дефинира функция на Ляпунов, за която да са изпълнени следните условия:

$$V(\mathbf{e}) > 0, \quad \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (9)$$

$$V(\mathbf{e}) = 0, \quad \mathbf{e} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} < 0, \quad \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (11)$$

Ако функцията  $V(\mathbf{e})$  се избере във вида:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \quad (12)$$

то тя ще отговаря на условията (9) и (10).

От (12) за производната на  $V(\mathbf{e})$  следва:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3. \quad (13)$$

Изразът (13) ще отговаря на условието (11), ако бъде приведен например във вида:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - k_3e_3^2, \quad (14)$$

където  $k_i$  са положителни константи. Приравняването на (13) към вида (14) би станало, ако за първите производни на функциите на разсъгласуване се получат изразите:

$$\dot{e}_i = -k_i e_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (15)$$

Тогава задачата се свежда до синтезиране на такива управляващи функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  към подчинената хаотична система (2), за които да се получат изразите (15).

Получаването на системата от разсъгласуването за синхронизационната схема (1)-(2) става след диференциране на левите и десните части на израза (7)

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i + \alpha_i \dot{\tilde{x}}_i, \quad i = 1 \div 3 \quad (16)$$

и последователно заместване в (16) на изразите за  $\dot{x}_i$  и  $\dot{\tilde{x}}_i$  от уравненията на управляващата система (1) и подчинената система (2):

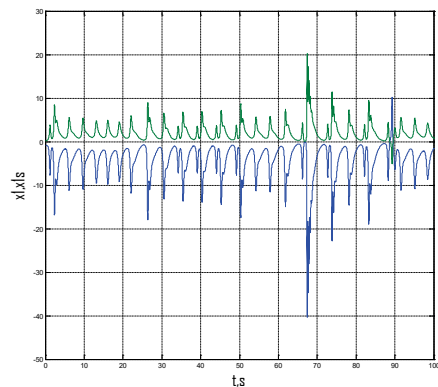
$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 + \alpha_1 \dot{\tilde{x}}_1 = -a_1 x_1 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_2 x_3 + \\ &+ \alpha_1 (-a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + a_3 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + g_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})), \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 + \alpha_2 \dot{\tilde{x}}_2 = a_4 x_2 - a_5 x_1 x_3 + \\ &+ \alpha_2 (a_4 \tilde{x}_2 - a_5 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + g_2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})), \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 + \alpha_3 \dot{\tilde{x}}_3 = -a_6 x_3 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_3^2 + \\ &+ \alpha_3 (-a_6 \tilde{x}_3 + a_7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + a_8 \tilde{x}_3^2 + g_3(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})). \end{aligned} \quad (17)$$

Ако управляващите функции  $g_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  се синтезират във вида:

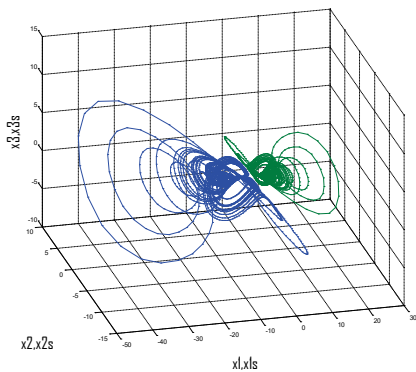
$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) &= [a_1 x_1 - a_2 x_1 x_3 - a_3 x_2 x_3 + \\ &+ \alpha_1 (a_1 \tilde{x}_1 - a_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 - a_3 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3)] / \alpha_1 - k_1 e_1, \\ g_2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) &= [-a_4 x_2 + a_5 x_1 x_3 + \\ &+ \alpha_2 (-a_4 \tilde{x}_2 + a_5 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3)] / \alpha_2 - k_2 e_2, \\ g_3(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) &= [a_6 x_3 - a_7 x_1 x_2 - a_8 x_3^2 + \\ &+ \alpha_3 (a_6 \tilde{x}_3 - a_7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - a_8 \tilde{x}_3^2)] / \alpha_3 - k_3 e_3, \end{aligned} \quad (18)$$

то при заместването им в (17) ще се получат изразите (15), което ще съответства на изпълнение на условието за постигане на мащабирана анти-синхронизация между управляващата хаотична система (1) и подчинената система (2).

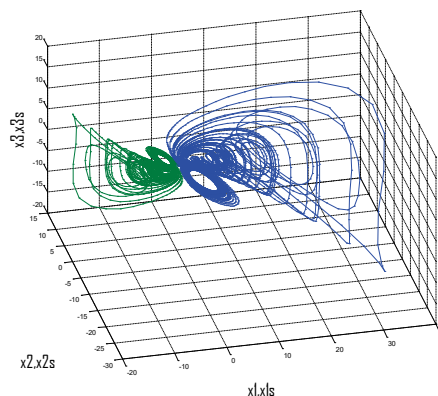
Прилагането на управляващите функции (18) към уравненията на подчинената система (2) води до получаването на желания вид мащабирана анти-синхронизация между системите (1) и (2). На фиг. 5 е показана съвместната динамика на променливите  $x_1(t)$  и  $\tilde{x}_1(t)$  за  $a_8 = -0.25$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 1 \ 0]^T$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$ ,  $k_i = 1$  и  $\alpha_i = 2$ . Динамиката е хаотична, като тази на променливата  $\tilde{x}_1(t)$  е мащабирана с коефициент 2 и е с обратен знак спрямо  $x_1(t)$ . Аналогични са времевите характеристики и на останалите двойки променливи на системите (1) и (2). Още по-добра представа за явлението мащабирана анти-синхронизация се добива при едновременното визуализиране на атракторите на системите (1) и (2), показано на фиг. 6. Атракторът на едната система е „огледален” мащабиран образ на атрактора на другата.



Фиг.5. Динамика на променливите  $x_1(t)$  и  $\tilde{x}_1(t)$  при мащабирана анти-синхронизация

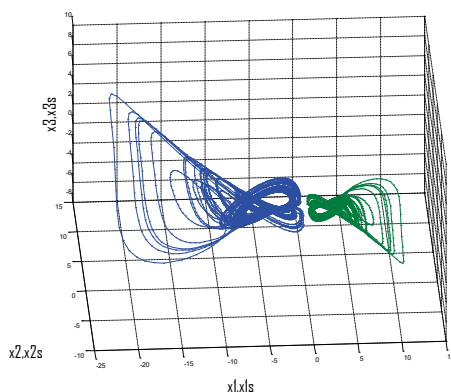


**Фиг.6.** Хаотични атрактори за  $a_8 = -0.25$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 1 \ 0]^T$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$



**Фиг.8.** Хаотични атрактори за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$

За стойност на бифуркационния параметър  $a_8 = 1.2$  в (1) и (2) в зависимост от началните условия атракторът на управляващата система (1) е този от фиг. 2 или фиг. 3. И в двата случая, при непроменени начални условия на подчинената система (2) -  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , нейният атрактор след синхронизацията се подчинява на този на управляващата система и се превръща в негово „огледално” мащабирано копие. На фиг. 7 и фиг. 8 са показани атракторите на системите (1) и (2) за начални условия на управляващата система съответно  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ -1 \ 0]^T$  и  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$ . Мащабирането на атрактора на подчинената система по отделните оси може да е различно, като това става със задаване на индивидуални стойности на константите  $\alpha_i$ .



**Фиг.7.** Хаотични атрактори за  $a_8 = 1.2$  и начални условия  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ -1 \ 0]^T$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [0.15 \ 0.1 \ 0.1]^T$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализирана е хаотична синхронизационна система със сложен тип синхронизация – мащабирана анти-синхронизация на основата на нов модел на хаотична система с различни атрактори. Системата може да се използва като основа на хаотична комуникационна система или в система за криптиране на данни с хаос.

## REFERENCE

- [1] Biswas, H., *et.al.* Chaos Theory and its Applications in Our Real Live. Barishal University Journal Part 1, 5: 123-140 (2018).
- [2] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [3] Parlitz, U. *et. al.* Encoding messages using chaotic synchronization. Physical Review E, Vol.53, No.5, 1996, pp.4351-4361.
- [4] Nwachiona C., H. P.-Cruz, Analysis of a new chaotic system, electronic realization and use in navigation of differential drive mobile robot, Chaos, Solutions & Fractals, Vol. 144, March 2021. pp.1-12.